数理解析研究所講究録
596巻 1986年 86-105

G/GI/1(m-LiPS)の平均系内ジョブ数に関する不等式および近似式

都立科技大　山崎 源治 (Genji Yamazaki)
筑波大　逆瀬川浩孝 (Hirotaka Sakasegawa)

1. はじめに

計算機システムの性能評価モデルとして，待ち行列ネットワークが用いられることが多い。このモデルにおいては，各資源，各ジョブはランダムな要因を含んでいてもよく，それでいて，いわゆる積形式解という陽解を持つので，実際に近い解析ができるという利点がある。しかし，一方で，解析を容易にするために，幾つかの制約が必要となっている。時分割処理に関するものもその制約の一つである。ラウンドロビン方式と呼ばれる時分割処理法は，一定数（これを以下では多重度と呼ぶ）のジョブに対してタイム・スライスを割り当て，それらのジョブを決められた順番で一つずつ処理していく方法である。性能評価モデルにこの処理方法を忠実にモデル化したものを取り入れると解析が難しくなるため，待ち行列ネットワークでは，それに対応するノードで資源分割（

Processor Sharing ）を採用している。このPS規律は，オーバヘッド時間を無視し，多重度制限を考えに入れないラウンドロビン方式で，そのタイム・スライスを限りなく短くしたときの極限状態として定義されている。これはまた，ジョブ数に応じて機能が低下する複数サーバと考えてもよい。

著者らは（[2]，[3]），このPS規律をより現実に近づけるため，多重度制約を設けたPS規律を定式化した。そして多重度mのPS規律を持つシステムを，m-Limited Processor Sharing System（m-LiPSシステム）と呼んだ。特に[3]では，ジョブがポアソン到着するLiPSシステムを扱い，次の予想が，かなり広いクラスのジョブのサービス要求量の分布に対して成立することを示した。

予想：　ジョブのサービス要求量の変動係数が1より大きい（小さい）ならば，多重処理した方がシステム効率は高く（低く）なる。

さらに[3]では，ジョブがポアソン到着するm-LiPSシステムの系内ジョブ数（平均）の近似式を導き，その近似式の精度がきわめてよいことを明らかにしている。[3]では，まず，点過程論における保存則を用いた一種の平衡方程式を導

き，それに基き上述の結果を得ている。

本稿は，[3]の一般到着への拡張である。すなわち，一般到着の m-LiPS システムの系内ジョブ数に関する一種の平衡式を導く。それに基づき，上述の予想がかなり広いサービス要求量の分布のクラス（NWVE, NBVE，定義は次節でなされる）に対して成立することを証明する。さらに，その平衡式の厳密解（もちろん，未知量を幾つか含んだ形で）から，平均系内ジョブ数の近似式を導く．そして，この近似式の精度を数値解と比べる。

2．モデルの記述，および基礎的結果

本稿では，次のような待ち行列システムを扱う。ジョブは到着率λで任意の過程に従って到着し，それぞれ分布B(x)に従うサービス要求量を持ってくるものとする。一般にサービス要求量をSと書き，その平均，2次モーメント，変動係数を，$E(S)$, $E(S^2)$, C_s と書く。また，$\rho=\lambda E(S)$とする。システムは1から順に番号づけられた無数のセルからなり，各セルにはジョブが1つだけ入ることができるものとする。到着したジョブは，いずれかのセルに入り，必要ならばセル間を移動しつつシステムに滞在し，サービス終了と同時にセ

ルから退去するものとする。n番目のセルを「ポジションn」と呼ぶ。システム内にnジョブ存在するとき，到着したジョブはポジション$n+1$へ入る。ポジションjのジョブが退去したときは，ポジション$j+1, j+2, \cdots$ のジョブは順にポジション$j, j+1, \cdots$ へ移る。

mをある自然数とし，このmに対して$\{r_j(n;m), j=1, 2, \cdots, n;\ n=1,2,\cdots$ を次のように定義する。

(1) $r_j(n;m) \geq 0$ for all j, n,
(2) $\sum_j r_j(n;m) = 1$ for all n,
(3) $r_j(n;m) = 0$ for $j > m$.

この$r_j(n;m)$を用いて，次のサービス規律を設ける。

m-Limited PS (m-LiPS) 規律 ：システム内のジョブ処理能力は常に一定（レート１）である。システム内のジョブ数がnのとき，その処理能力の$100 r_j(n,m)$ %をポジションjへ振り向ける。

上述の待ち行列システムがこの規律にしたがってジョブのサービスを行うとき，ある固定したmに対して同時にサービス

を受けることができるのは，高々ポジション1〜mにいるジョブだけである。また処理能力一定のサーバが複数のジョブを同時にサービスする仕方を待ち行列論ではPS規律と呼んでいるため，この規律をm-LiPS規律と呼ぶことにする。また，この規律に従ってジョブを処理する待ち行列システムをm-LiPSシステムと呼ぶ。

m-LiPSシステムで，ジョブの到着過程，サービス要求量の分布を明示したいときは，通常の記号にならい，A/B/1(m-LiPS)で表わす。その際，一般分布をG，GIを用いて表すが，前者の場合はジョブ間の独立性を仮定せず，後者の場合のみ，それを仮定する。G/G/1(1-LiPS)はFCFS規律に従う通常の単一サーバシステムである。G/G/mで手空のサーバは他へ手伝いに行く，という場合もこのm-LiPSシステムとなる。また前述のPS規律は，$\gamma_j(n;m)=1/n$でmを無限大とした場合である（定義ではmを自然数としたが，便宜上，以下では$m=\infty$も許すことにする）．タイムスライスが一定のラウンドロビン方式は，$\gamma_j(n;m)=1/n$ $(n\leq m)$によってモデル化できる。このm-LiPSシステムについて，次の記号を用いる。

$L(t;m)$＝時刻tにおけるシステム内ジョブ数，

$R(t;m)$ = 時刻t以後初めて新しいジョブが到着するまでの時間,

$U(t;m)$ = 時刻tにシステム内にいるジョブの残り仕事量(サービス要求量)の総和.

2つの確率変数X, Yに対して, その分布が等しいとき, すなわち $\Pr(X \leqq x) = \Pr(Y \leqq x)$ for all x のとき, $X \overset{st}{=} Y$ と書く. 非負の確率変数Xの分布関数を$F(x)$, $1-F(x)=\bar{F}(x)$ とする。この$F(x)$と任意の数$\tau \geqq 0$に対して次の分布関数$F_\tau(x)$を定義し, この$F_\tau(x)$に従う確率変数をX_τとかく.

$$1 - F_\tau(x) = \bar{F}(x+\tau)/\bar{F}(\tau).$$

このとき, 次の分布関数のクラスを導入する.

<u>定義</u>: $F(x)$がNBUE (New Better than Used)であるとは, $E(X_\tau) \leqq E(X)$が成立することである.

この定義で, 不等号の向きが逆であるとき, $F(x)$はNWUEであるという。NBUE, NWUEと変動係数の関係については, 次の結果が成立つ.

補題1：$F(x)$がNBUE（NWUE）なら，その変動係数は1より小さい（大きい）。

$G/G/1$（m-LiPS）に関して著者ら[2]により，次の事実が証明されている．

補題2：任意のmに対して，$U(t;m)\overset{st}{=}U(t;1)$．

補題3：m-LiPSシステムにおける平衡条件は，1-LiPSシステムのそれと一致する．

この補題によれば，m-LiPSシステムの平衡条件は$\rho<1$である。以下，本稿では$\rho<1$で定常状態のみを考える。

3. $G/G/1$（m-LiPS）の平衡式

本節では，点過程の保存則に基づき，システム内ジョブ数に関する一種の平衡式を導く．

$N_0\{(t_1, t_2]\}$を到着に関する点過程（t_1, t_2間の到着数，$N_1\{(t_1, t_2]\}$を退去に関する点過程とする。$\{X(t)\}$をジョブの到着・退去時点を除いて，連続で右微分可能な標本関

数を持つ確率過程とし，$X(t)$, $N_0(\cdot)$, $N_1(\cdot)$ は同時に定常である，とする。このとき，m-LiPS システムでは，

$$\lambda\,(\text{到着率}) = E\{N_0((0,1])\} = E\{N_1((0,1])\}$$

が成立する。時刻 0 にジョブが到着した（退去した）という条件の下での確率を，P_0（P_1）と書き，P_0（P_1）に関する期待値を E_0（E_1）で表わす。このとき，次の補題が成立する（Miyazawa [1] の Corollary 3.1 ）。

<u>補題4:</u> $E_0|X(0-)-X(0+)|$, $E_1|X(0-)-X(0+)|$ が有限ならば，

$$(3.1)\qquad E[X^{+}(0)] = \lambda E_0[X(0-)-X(0+)] + \lambda E_1[X(0-)-X(0+)].$$

~~ここで X~~ ここで，$X^{+}(0)$ は $X(0)$ の右微分を表わす。

m-LiPS システムに関して，$X(t)$ を次のように定義する。

$$(3.2)\qquad X_n(t) \overset{d}{=} I_{\{L(t;m)=n\}} \exp\{-\xi R(t;m) - \theta U(t;m)\}.$$

8

このとき，$\{X_n(t)\}$は補題4の条件を満たすことは明らかである。詳細は省略するが，各nに補題4を適用することにより，次の定理を得ることができる．

定理1： G/GI/1（m-LiPS）に関して，

$$(3.2)\qquad (\zeta+\theta)\Phi(\zeta,\theta)p_n(m)=\lambda\Phi_n^0(0,\theta)p_n^0(m)-\lambda\tilde{B}(\theta)\Phi_{n-1}^0(\zeta,\theta)p_{n-1}^0(m)$$
$$+\lambda\Phi_{n-1}^*(\zeta,\theta)p_{n-1}^*(m)-\lambda\Phi_n^*(\zeta,\theta)p_n^*(m),$$

ここで，
$$p_n(m)=P\{L(0;m)=n\},\quad p_n^0(m)=P_0\{L(0-;m)=n\},$$
$$p_n^*(m)=P_1\{L(0+;m)=n\},\quad \tilde{B}(\theta)=E(e^{-\theta S}),$$
$$\Phi_n(\zeta,\theta)=E\{e^{-\zeta R(0;m)-\theta U(0;m)}\,|\,L(0;m)=n\},$$
$$\Phi_n^0(\zeta,\theta)=E_0\{e^{-\zeta R(0;m)-\theta U(0;m)}\,|\,L(0-;m)=n\},$$
$$\Phi_n^*(\zeta,\theta)=E_1\{e^{-\zeta R(0;m)-\theta U(0;m)}\,|\,L(0+;m)=n\}.$$

(3.2)式で，$\zeta=\theta=0$とおくことにより次式を得る。

$$(3.3)\qquad p_n^0(m)-p_n^*(m)+p_{n-1}^0(m)-p_{n-1}^*(m)=0\quad(n\geq 1).$$

(3.3)式で，$n=1,2,\ldots$として加え合わせることにより，$p_0^0(m)=p_0^*(m)$

を得ることができ，これを(3.3)式に代入することにより $p_1^\circ(m) = p_1^*(m)$ を得る。この手順を続けることにより，結局次の結果を得る。

(3.4) $$p_n^\circ(m) = p_n^*(m) \qquad (n=0,1,2,\cdots).$$

これは，Finch の結果としてよく知られている。

(3.2)式で $z=0$ とし，両辺を θ で割り，$\theta \to 0$ とすることにより次の結果を得る。

系1： G/GI/1 (m-LiPS) では，

(3.5) $$p_1(m) = \rho\, p_0^\circ(m) + \lambda\{E_1(u_{1,m}) - E_0(u_{1,m})\}\, p_1^\circ(m),$$

$$p_n(m) = \rho\, p_{n-1}^\circ(m) + \lambda\{E_0(u_{n-1,m}) - E_1(u_{n-1,m})\}\, p_{n-1}^\circ(m) + \lambda\{E_1(u_{n,m}) - E_0(u_{n,m})\}\, p_n^\circ(m),$$

そこで，$E_0(u_{n,m}) = E_0\{U(0;m) \mid L(0-;m)=n\}$,

$$E_1(u_{n,m}) = E_1\{U(0;m) \mid L(0+;m)=n\}.$$

4. $E\{L(0;m)\}$の不等式

前節の系1から$\{p_n(m)\}$に関する母関数を容易に得ることができる。すなわち，(3.5)式の両辺にx^n ($|x|<1$)を乗じ，$n=1,2,\cdots$について加え合わせることにより，次の定理を得る。

定理2: $G/GI/1$ (m-LiPS) では，

$$
(4.1)\qquad \psi(x;m)=\rho x\{p_0^\circ(m)+\psi^\circ(x;m)\}+\lambda\{\psi_u^*(x;m)-\psi_u^\circ(x;m)\}
$$
$$
+\lambda x\{\psi_u^\circ(x;m)-\psi_u^*(x;m)\},
$$

ここで，

$$
\psi(x;m)=\sum_1^\infty x^n p_n(m),\quad \psi^\circ(x;m)=\sum_1^\infty x^n p_n^\circ(m),
$$
$$
\psi_u^\circ(x;m)=\sum_1^\infty x^n E_0(u_{n,m})\,p_n^\circ(m),
$$
$$
\psi_u^*(x;m)=\sum_1^\infty x^n E_1(u_{n,m})\,p_n^\circ(m).
$$

この定理から，母関数から$E\{L(0;m)\}$ (以後，これを$L(m)$と書く) を得る通常の方法により，次の$L(m)$に関する表現を得る。ただし，その際に，§2の補題2から導かれる事実，

$$
\sum_1^\infty E(U(0;m)\,|\,L(0;m)=n)\,p_n(m)=\sum_1^\infty E(U(0;1)\,|\,L(0;1)=n)\,p_n(1),
$$

を用いている。

系2:

$$(4.2)\qquad L(m)=L(1)+\lambda\sum_{1}^{\infty}nE(S)\,p_n^0(m)-\lambda\sum_{1}^{\infty}E_1(U_{n,m})\,p_n^0(m).$$

(4.2)式の右辺の$E_1(U_{n,m})$はあるジョブの退去直後にnジョブシステムに残り，それらの残りサービス要求量の総和を意味する。従って，もしジョブのサービス要求量の分布がNBUE（NWUE）なら，$nE(S)\underset{(\leqq)}{\geqq}E_1(U_{n,m})$となり，これと，(4.2)式より次の結果を得る。

定理3:(注-1) G/GI/1(m-LiPS)で，サービス要求量の分布がNWUE(NBUE)なら，

$$(4.3)\qquad L(m)\underset{(\geqq)}{\leqq}L(1).$$

この定理は，かなり広いクラスの要求量の分布に対して，§1の予想が真であることを示している（§1. 補題1）.

5. L(m)の近似式

前節では，L(m)の定性的性質を論じた．従って，そこで

は，$r_j(n;m)$ について何ら具体的に与えず，§2 の(1)，(2)，(3) のみを満足すれば十分であった。しかしながら，$L(m)$ を定量的に評価しようとするなら，それだけでは不十分である。なぜなら，$r_j(n;m)$の設定により，同じ m-LiPS システムでも $L(m)$ は大きく異なると考えられるからである。従って，本節では，$r_j(n;m)$ が次のように設定された LiPSシステムを扱う。

(4) $$r_j(n;m) = \begin{cases} 1/n & j \leqq n \leqq m, \\ 1/m & j \leqq m \leqq n. \end{cases}$$

これは，通常のタイムスライスが一定のラウンドロビン方式に対応している。$L(m)$の正確な導出は結局 $G/GI/m$ を解くことと同程度の困難性を伴うため，現状ではある限られた場合を除き無理である。そこで，本節では，前節の (4.2) 式を基に，適当な近似仮定（今のところ合理的と考えられる仮定）を与え，$L(m)$ の近似式を求めてみる。

近似仮定の最初のものは，ジョブの到着（退去）直前（直後）のシステム内ジョブの残りサービス要求量に関するものである。すなわち，次の仮定を置く。

[A.1]

$$E_0(u_{n,m}) \simeq \min(n,m)\cdot\frac{E(S^2)}{2E(S)} + \max(0,n-m)E(S),$$

$$E_1(u_{n,m}) \simeq \min(n,m-1)\cdot\frac{E(S^2)}{2E(S)} + \max(0,n-m+1)E(S).$$

この仮定の自然な解釈は，ジョブの到着直前(退去直後)にすでに何んらかのサービスを受けていたジョブの残り仕事量の和の平均は，サービス要求量の'residual time'の平均である，ということである。この仮定は，もちろんM/M/1(m-LiPS)では真で，さらに，本節で考えている $r_i(n;m)$ に対しては，M/GI/1(∞-LiPS)でも真である。

この仮定を(3.5)式で用いることにより次の結果を得る。

(5.1) $$p_n(m) = \rho\, p^{\circ}_{n-1}(m) \qquad n=1,2,\cdots,m-1.$$

第2番目の近似仮定は，ジョブの退去から次のジョブの到着までの平均時間，すなわち，$E_1\{R(0;m)\mid L(0+;m)=n\}$ に関するものである。補題2から，$E_1\{R(0;m)\mid L(0+;m)=0\}$ $=E_1\{R(0;1)\mid L(0+;1)=0\}$ は任意の m について成立する。一方，もし $p^{\circ}_0(1)$ が既知なら，$E_1\{R(0;1)\mid L(0+;1)=0\}=$

$\frac{1-\rho}{1-\sigma}E(S)$ が既知となる。それ故 $E_1\{R(0;m)\,|\,L(0+;m)=n\}$ について次の仮定を設ける。

[A. 2]

$$E_1\{R(0;m)\,|\,L(+0;m)=n\}=\frac{1-\rho}{1-\sigma}E(S)$$

for all n.

(3.2)式で $\theta=0$ とし，両辺を ξ で割り，$\xi\to 0$ とした後，[A. 2]を用いることにより次の結果を得る。

$$(5.2)\qquad p_n(m)=p_n^0(m)\frac{1-\rho}{1-\sigma}+p_{n-1}^0(m)\left\{1-\frac{1-\rho}{1-\sigma}\right\}.$$

(5.1), (5.2)式から $p_n^0(m)$ を求めると，

$$(5.3)\qquad p_n^0(m)=\sigma^n(1-\sigma)\qquad n=0,1,2,\cdots,m-1.$$

(4.2)式で[A. 1], (5.3)式を用いることにより，結局 $L(m)$ に関する次の近似式を得ることができる。

$$(5.4)\qquad L(m)\simeq L(1)+\frac{\rho\sigma(1-C_s^2)(1-\sigma^{m-1})}{2(1-\sigma)}$$

この近似式を使うためには，$L(1)$，○を必要とする。そして$L(1)$，○に関しては種々の近似が提案されている．また，(5.4)式の精度については，次節で論じる。

6. 数値例

本節では，$L(m)$の数値解が得られる幾つかの例を取り上げ，近似式(5.4)の精度を調べる。

その結果は表1にある。[表1]に上げたシステムは，$E_2/E_2/1$ (m-LiPS) ($C_a^2=0.5$, $C_s^2=0.5$; C_a＝到着間隔の変動係数)，$E_3/E_2/1$ (m-LiPS) ($C_a^2=0.333$, $C_s^2=0.5$)，$E_4/E_2/1$ (m-LiPS) ($C_a^2=0.25$, $C_s^2=0.5$) ((a)) と $H_2/H_2/1$ (m-LiPS) ($C_a^2=2.0$, 3.0, $C_s^2=2.0$, 3.0) ((b)) である。ここでH_2とは，通常の2つの異なったレイトを持つ指数分布から構成される超指数分布を意味する。また表1でのLaが(5.4)式による$L(m)$の近似である。

[表1]の(a)によると，$E_k/E_k/1$ (m-LiPS)については，(5.4)式はきわめてよい精度を持っている。もちろん，$m=1$ (表では$s=1$)の場合，(5.4)式は近似ではなくなるが，$m=2$，$k=2$でも，$(La-L)/L$は0.0であることは，注目すべきことである(注-2)．

[表·1]　L(s) in PH/PH/1 (s -LiPS)

(a)

Ca^2	Cs^2
0.500	0.5

L(s)

s	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.102	0.339	0.695	1.427	4.823
2	0.102	0.351	0.740	1.532	5.017
3	0.102	0.353	0.756	1.593	5.182
4	0.102	0.353	0.761	1.629	5.324
5	0.102	0.353	0.763	1.650	5.444
6	0.102	0.353	0.764	1.662	5.547
7	0.102	0.353	0.764	1.669	5.635
8	0.102	0.353	0.764	1.673	5.711
∞†	0.108	0.396	0.875	1.925	6.975
P(wait)	0.024	0.160	0.360	0.597	0.861

(La-L)/L

s	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
3	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%
4	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.1%
5	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.1%
6	0.0%	0.0%	0.2%	0.3%	0.2%
7	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.2%
8	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.3%

Ca^2	Cs^2
0.333	0.5

L(s)

s	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.101	0.323	0.639	1.265	4.109
2	0.101	0.331	0.676	1.360	4.298
3	0.101	0.332	0.686	1.410	4.454
4	0.101	0.332	0.689	1.436	4.584
5	0.101	0.332	0.689	1.450	4.691
6	0.101	0.332	0.689	1.457	4.779
7	0.101	0.332	0.690	1.461	4.853
8	0.101	0.332	0.690	1.463	4.913
∞†	0.107	0.386	0.833	1.789	6.300
P(wait)	0.008	0.106	0.293	0.543	0.839

(La-L)/L

s	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
3	0.0%	0.0%	0.1%	0.1%	0.0%
4	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.1%
5	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.2%
6	0.0%	0.0%	0.2%	0.4%	0.3%
7	0.0%	0.0%	0.2%	0.5%	0.4%
8	0.0%	0.0%	0.2%	0.5%	0.5%

Ca^2	Cs^2
0.250	0.5

L(s)

s	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.100	0.316	0.612	1.185	3.753
2	0.100	0.322	0.644	1.274	3.938
3	0.100	0.323	0.651	1.318	4.089
4	0.100	0.323	0.653	1.339	4.211
5	0.100	0.323	0.654	1.349	4.310
6	0.100	0.323	0.654	1.354	4.390
7	0.100	0.323	0.654	1.357	4.455
8	0.100	0.323	0.654	1.358	4.508
∞†	0.107	0.380	0.813	1.721	5.963
P(wait)	0.003	0.078	0.255	0.510	0.825

(La-L)/L

s	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
3	0.0%	0.0%	0.1%	0.2%	0.1%
4	0.0%	0.0%	0.1%	0.3%	0.2%
5	0.0%	0.0%	0.1%	0.4%	0.3%
6	0.0%	0.0%	0.2%	0.5%	0.4%
7	0.0%	0.0%	0.2%	0.5%	0.5%
8	0.0%	0.0%	0.2%	0.6%	0.6%

L(m) in PH/PH/1 (m-LiPS)

(b)

Ca^2	Cs^2
2.0	2.0

L(m)

m	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.122	0.558	1.506	3.985	17.143
2	0.116	0.500	1.354	3.710	16.722
3	0.115	0.482	1.275	3.508	16.335
4	0.115	0.477	1.232	3.359	15.981
5	0.115	0.475	1.209	3.249	15.655
6	0.115	0.474	1.197	3.168	15.354
7	0.115	0.474	1.190	3.107	15.078
8	0.115	0.474	1.186	3.061	14.824
$\infty^{\dagger}$	0.117	0.493	1.250	3.150	13.050
P(wait)	0.130	0.370	0.582	0.766	0.927

(La-L)/L

m	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	0.1%	0.5%	0.5%	0.2%	0.0%
3	-0.1%	-0.1%	0.1%	0.1%	0.0%
4	-0.1%	-0.5%	-0.5%	-0.2%	0.0%
5	-0.1%	-0.7%	-0.9%	-0.5%	0.0%
6	-0.1%	-0.8%	-1.3%	-0.8%	-0.1%
7	-0.1%	-0.8%	-1.5%	-1.2%	-0.2%
8	-0.1%	-0.8%	-1.7%	-1.5%	-0.2%

Ca^2	Cs^2
2.0	3.0

L(m)

m	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.129	0.632	1.775	4.830	21.226
2	0.116	0.517	1.473	4.278	20.382
3	0.115	0.484	1.321	3.882	19.613
4	0.115	0.474	1.243	3.596	18.909
5	0.115	0.471	1.202	3.388	18.266
6	0.115	0.470	1.180	3.237	17.677
7	0.115	0.469	1.168	3.126	17.138
8	0.115	0.469	1.162	3.045	16.644
$\infty^{\dagger}$	0.117	0.493	1.250	3.150	13.050
P(wait)	0.129	0.365	0.575	0.761	0.925

(La-L)/L

m	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	0.3%	1.0%	1.0%	0.5%	0.1%
3	-0.2%	-0.4%	0.1%	0.3%	0.1%
4	-0.3%	-1.3%	-1.2%	-0.3%	0.0%
5	-0.3%	-1.8%	-2.4%	-1.1%	-0.1%
6	-0.3%	-2.0%	-3.3%	-2.0%	-0.2%
7	-0.3%	-2.1%	-3.8%	-2.9%	-0.3%
8	-0.3%	-2.1%	-4.2%	-3.7%	-0.5%

Ca^2	Cs^2
3.0	2.0

L(m)

m	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.125	0.605	1.725	4.777	21.201
2	0.118	0.541	1.562	4.491	20.776
3	0.117	0.519	1.469	4.271	20.380
4	0.117	0.511	1.415	4.100	20.011
5	0.117	0.508	1.382	3.968	19.667
6	0.117	0.507	1.363	3.864	19.345
7	0.117	0.506	1.352	3.783	19.045
8	0.117	0.506	1.345	3.720	18.764
$\infty^{\dagger}$	0.122	0.557	1.500	3.967	17.100
P(wait)	0.146	0.411	0.631	0.806	0.942

(La-L)/L

m	rou 0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
1	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%	0.0%
2	0.2%	0.5%	0.3%	0.1%	0.0%
3	-0.1%	-0.1%	-0.1%	-0.1%	0.0%
4	-0.1%	-0.6%	-0.7%	-0.4%	-0.1%
5	-0.1%	-0.9%	-1.3%	-0.8%	-0.1%
6	-0.1%	-1.0%	-1.8%	-1.2%	-0.2%
7	-0.1%	-1.1%	-2.1%	-1.6%	-0.3%
8	-0.1%	-1.1%	-2.3%	-2.0%	-0.3%

〔表1〕の(b)によると，$C_s^2 > 1$のときは，C_sが大きくなるにつれ，$(L_a-L)/L$は大きくなるが，$C_s^2=3.0$でその最大誤差は4%程度である。従って，この場合でも(5.4)式は実用上十分の精度を持っている。

(5.4)式を導く際の最もラフな仮定は，〔A.1〕である。もし，これが少し改善できれば($E_0(u_{n,m})$，$E_1(u_{n,m})$に関する何らかの情報を取入れることができれば)，(4.2)式を基に$L(m)$のよりよい近似式が得られる。これについては，次の機会に述べてみたい。

本研究は，日本電気(株)の援助を受けて，行った。

〔補注〕：

(注-1)：詳細は省略するが，$L(m)$のmを$G/GI/1$システムの任意のサービス規律，$L(1)$の1を$G/GI/1$のFCFS規律と解したとき，補題2が成立する規律のみを考えたとき，(4.2)式，従って定理3が成立する。

(注-2)：〔3〕では，$M/E_2/1$ (2-LiPS)では，(5.4)式が近似ではなくなることを示した。一方，〔表1〕以外の数値

例でも，任意の到着過程，すなわち $GI/E_2/1$ (2-LiPS) に対しては (5.4) 式が exact となっている。

参考文献

[1] Miyazawa, M.: The derivation of invariance relations in complex queueing systems with stationary inputs, Adv. Appl. Prob., Vol. 15, pp. 874-885 (1983).

[2] Yamazaki, G. and Sakasegawa, H.: An optimal design problem of limited processor sharing systems, Institute of Socio-Economic Planning, Discussion Paper Series No. 246 (1984), University of Tsukuba.

[3] 山崎，逆瀬川：タイム・シェア処理における多重度の効果，情報処理学会オペレーティング・システム研究会資料 20 (1985).